TD 5 - Différentielle

Questions de cours.

(a) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles, et $p_0 \in \Omega$. Que veut dire : f est différentiable en p_0 ? Définir le gradient $\nabla f(p_0)$ de f en p_0.

(b) Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction, et $p_0 \in \Omega$. Que veut dire : f est différentiable en p_0 ? Définir la différentielle $df(p_0)$ de f en p_0.

(c) Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces vectoriels normés. Donner la définition de fonction différentiable $f : V \to W$ en $p_0 \in V$, et de différentielle de f en p_0.

(d) Est-ce que toute fonction différentiable est continue ? Est-ce que toute fonction continue est différentiable ?

(e) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, $p \in \mathbb{R}^n$ un point et $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ un vecteur non nul. Donner la définition de dérivée partielle de f en p le long des coordonnées $x_1, \ldots, x_n$, et de dérivée directionnelle de f en p le long de v.

(f) Quelle relation y a-t-il entre les fonctions différentiables et les dérivées partielles/directionnelles ?

(g) Qu'est-ce qu'une application de classe $\mathcal{C}^1$?

(h) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $p \in \mathbb{R}^n$. Qu'est-ce que la matrice jacobienne de f en p ?

(i) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application différentiable en $p \in \mathbb{R}^n$. Donner un système d'équations qui décrit l'hyperplan tangent au graphe de f en $(p, f(p))$.

(j) Énoncer le théorème des accroissements finis pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

(k) Énoncer l'inégalité des accroissements finis pour $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$, avec $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert.

Exercice 1. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \Omega$.

(a) Rappeler ce que veut dire : f est dérivable en x_0.

(b) Montrer que f est dérivable en x_0 si et seulement si f est différentiable en x_0.

(c) Exprimer la différentielle de f en x_0 par rapport à sa dérivée.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(a) Montrer que f_0 n'est pas continue en 0.

(b) Montrer que f_1 est continue, mais pas dérivable en 0.

(c) Montrer que f_2 est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3$.

(a) Montrer que pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{y_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ est dérivable, et en calculer la dérivée en tout point.

(b) Montrer que pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, la fonction $f_{x_0} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f_{x_0}(y) = f(x_0, y)$ est dérivable, et en calculer la dérivée en tout point.

(c) Montrer que f est différentiable en tout point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la différentielle (le gradient) en tout point.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = x^2(1 + \cos y) + \ln(1 + x^2 z^2)$.

(a) Calculer les dérivées partielles de f par rapport aux coordonnées x, y, z. En déduire l'expression pour le gradient de f.

(b) Calculer la dérivée directionnelle de f le long des vecteurs $(1, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(1, 2, -1)$, $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$.

(c) Trouver les valeurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ telles que $\nabla f(x, y, z) = 0$.

(d) Est-ce que f est de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \sqrt{|1-x^2-y^2|}$.

(a) Justifier que f est continue.

(b) Dessiner le graphe $\Gamma_f \subset \mathbb{R}^3$ de f.

(c) Dans quel sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ l'application f est-elle différentiable ? Dénotons par S le lieu où f n'est pas différentiable.

(d) Donner l'équation du plan tangent à Γ_f au dessus des points $p_0 = (0,0)$, $p_1 = (\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$, $p_2 = (1,-1)$.

Pour tout $(x_0,y_0) \notin S$, on peut exprimer le plan tangent $V_{(x_0,y_0)}$ à Γ_f au dessus du point (x_0,y_0) sous la forme :

$$V_{(x_0,y_0)} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid a(x_0,y_0)(x-x_0) + b(x_0,y_0)(y-y_0) + c(x_0,y_0)(z-f(x_0,y_0)) = 0\},$$

où a, b, c sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

(e) Montrer que si $(x_0,y_0) \in H \setminus S$, alors le vecteur $(a,b,c) = (a(x_0,y_0), b(x_0,y_0), c(x_0,y_0))$ est univoquement déterminé par les conditions $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $a > 0$. Dénotons par $g(x_0,y_0) = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ ce vecteur unique, et par $g : H \setminus S \to \mathbb{R}^3$ la fonction associée.

(f) Calculer la limite de $g(x_0,y_0)$ pour $(x_0,y_0) \to (1,0) \in H \cap S$.

(g) Montrer que g s'étend à une fonction continue sur tout H.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et désignons par $\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ la sphère de centre 0 et rayon 1 dans $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\|_2 = 1\},$$

où $\|\cdot\|_2$ dénote la norme euclidienne standard.
On munit $\mathbb{S}^{n-1}$ de la structure d'espace métrique induite par la distance d induite par $\|\cdot\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$. Soit $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Remarquons que tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $x = \lambda v$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $v \in \mathbb{S}^{n-1}$. On peut donc définir une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ comme suit :

$$f(\lambda v) = \lambda g(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, v \in \mathbb{S}^{n-1}, \qquad f(0) = 0.$$

(a) Dessiner le graphe de f lorsque $n = 2$ et g est la fonction constante égale à 1.

(b) Montrer que f est continue si et seulement si g l'est.

(c) Montrer que si $g(-v) = -g(v)$, alors f admet une dérivée directionnelle en 0 le long de v. En déduire que si g est une fonction impaire, alors f admet une dérivée directionelle en 0 suivant n'importe quelle direction.

(d) Montrer que f est différentiable en 0 si et seulement si g est de la forme $g(v) = \langle w, v\rangle$ pour un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ opportun, où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dénote le produit scalaire standard. Dans ce cas, montrer que w est le gradient de f en 0.

(e) Trouver g telle que f est continue, admet une dérivée directionnelle en 0 suivant n'importe quelle direction, mais telle que f n'est pas différentiable en 0.

Exercice 7. Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ une fonction continue. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si les dérivées partielles $\partial_j f$ de f existent et sont continues pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(t) = (\cos t, \sin t, t)$.

(a) Dessiner $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^3$.

(b) Montrer que f est une application différentiable, et en calculer la différentielle.

(c) Soit $t_0 = 0$ et $t_1 = 2\pi$. Montrer qu'il n'y a pas de $t \in [t_0, t_1]$ tel que $f(t_1) - f(t_0) = df(t)(t_1 - t_0)$.

Exercice 9. Soit $B \subseteq \mathbb{R}^n$ une boule ouverte, et $f : B \to \mathbb{R}^m$ une fonction différentiable. Montrer que f est lipschitzienne si et seulement si

$$\sup_{p \in B} \|df(p)\| < +\infty,$$

où $df(p)$ est la différentielle de f en p, et $\|\cdot\|$ est n'importe quelle norme dans l'espace des applications linéaires $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Exercice 10. Déterminer si les fonctions suivantes $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (sauf différemment indiqué, $\Omega = \mathbb{R}^n$), sont continues, différentiables, de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer le gradient $\nabla f(p)$ en tout point p où f est différentiable.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x^2 + y^3 - e^z$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \cos(xy)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ si $xy \neq 0$. $f(x, y) = 0$ si $x = 0$ ou $y = 0$.

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$.

(f) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$.

(g) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy \ln(1 + z^2)$.

(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xy \ln z^2$ si $z \neq 0$, $f(x, y, 0) = 0$.

(i) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \tan\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$.

(j) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x + y < 1\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2 - \cos\left(\frac{1}{x+y}\right)$.

(k) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{|x^2 + y^2 - 1|}$.

(l) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{|x^2 - y^2|}$.

Exercice 11. Déterminer si les fonctions suivantes $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont continues, différentiables, de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer la différentielle $df(p)$ en tout point p où f est différentiable.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x^2 + 2y, e^{xy})$.

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (\cos(2x), \sin(3x), \arctan x^2)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (y \ln(1 + x^2), xy - 3, 5)$.

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = \begin{cases} \left(x^2yz \sin\left(\frac{1}{x}\right), 1 + y + x \ln|x|\right) & \text{si } x \neq 0, \\ (0, 1 + y) & \text{si } x = 0. \end{cases}$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n+1}$, $f(x, y) = (x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \ldots, xy^{n-1}, y^n)$.

Exercice 12. Dans les deux exercices précédents, déterminer si f est uniformément continue, si f est lipschitzienne.

Exercice 13. Soit $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et différentiable en $]a, b[$. Le théorème des accroissements finis nous dit dans ce cas qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$.

(a) Montrer que $g'(c) = \displaystyle\int_0^1 g'((1 - t)a + tb)dt$.

Soit maintenant $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ouvert. Étant donnés deux points $p, q \in \mathbb{R}^n$, on dénote par $[p, q] = \{(1 - t)p + tq \mid t \in [0, 1]\}$ le segment de sommets p, q, et $]p, q[:= [p, q] \setminus \{p, q\}$. Soient $a, b \in \Omega$ tels que $[a, b] \subset \Omega$.

(b) Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = \nabla f(c) \cdot (b - a)$.

(c) Exprimer $\nabla f(c)$ en forme intégrale en utilisant le point (a).

Soit enfin $F : \Omega \to W$ une fonction différentiable, où $\Omega \subseteq V \cong \mathbb{R}^n$ est un ouvert, et $W \cong \mathbb{R}^m$. Les espaces vectoriels V et W sont munis de normes $\|\cdot\|_V$ et $\|\cdot\|_W$ respectivement. On dénote par $[\![\cdot]\!]$ la norme subordonnée induite sur l'espace des applications linéaires $L : V \to W$. Soient $a, b \in \Omega$ comme précédemment.

(d) Montrer que $F(b) - F(a) = \left(\displaystyle\int_0^1 dF\big((1 - t)a + tb\big)dt\right)(b - a)$, où l'intégrale est à considérer coordonnée par coordonnée.

(e) En déduire que $\|F(b) - F(a)\|_W \leq \sup_{c \in]a,b[} [\![dF(c)]\!] \, \|b - a\|_V$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = y \ln x$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer son gradient en tout point.

(b) Montrer que pour tout $x \geq 1$ et $y \geq 0$ on a $f(x, y) \leq y(x - 1)$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = x^2y + 2\frac{e^x}{y}$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

(b) Calculer le gradient ∇f de f.

Soient $p_0 = (0, 1)$ et $p_1 = (1, 2)$, et notons $p_t = (1 - t)p_0 + tp_1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $t \in]0, 1[$ tel que $f(p_1) - f(p_0) = \nabla f(p_t) \cdot (p_1 - p_0)$:

(c) en utilisant un théorème du cours.

(d) par calcul direct.

(e) Est-ce que la même propriété reste vraie si on remplace p_1 par $-p_0 = (0, -1)$?

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x - \left|y^2 - x^3\right|$.

(a) Dessiner la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x^3\}$.

(b) Montrer que f est continue, et que $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

(c) Calculer le gradient de f sur tout point $p \in \mathbb{R}^2 \setminus C$.

(d) Montrer que f n'est pas différentiable en $C \setminus \{(0, 0)\}$.

(e) Montrer que f est différentiable en $(0, 0)$.

Soient $p_0 = (-2, 0)$, $p_1 = (2, 0)$, $q_0 = (0, -2)$, $q_1 = (0, 2)$.

(f) En utilisant un théorème du cours, montrer qu'il existe $q \in]q_0, q_1[$ tel que $f(q_1) - f(q_0) = \nabla f(q) \cdot (q_1 - q_0)$.

(g) Traduire la propriété ci-dessus pour la restriction de f à $\{x = 0\}$.

(h) En utilisant un théorème du cours, montrer qu'il existe $p \in]p_0, p_1[$ tel que $f(p_1) - f(p_0) = \nabla f(p) \cdot (p_1 - p_0)$.

(i) Trouver un tel p explicitement.

(j) Montrer qu'il n'existe pas de $r \in]q_0, p_1[$ tel que $f(p_1) - f(q_0) = \nabla f(r) \cdot (p_1 - q_0)$. Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème des accroissements finis dans ce cas ?

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$.

(a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et calculer sa différentielle.

(b) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que $|(x + h) \cos(y + k) - x \cos y| \leq |h| + |k|(|x| + |h|)$ et $|(x + h) \sin(y + k) - x \sin y| \leq \sqrt{2}\big(|h| + |k|(|x| + |h|)\big)$.

(c) En déduire que $\|f(x + h, y + k) - f(x, y)\|_2 \leq \sqrt{2}|h|(1 + |x|)$.

(d) Montrer en utilisant l'inégalité des accroissements finis que $\|f(x + h, y + k) - f(x, y)\|_2 \leq \sqrt{h^2 + k^2} \max\{1, |x| + |h|\}$.

Exercice 18. Soient $(V, \|\cdot\|_V)$ et $(W, \|\cdot\|_W)$ deux espaces vectoriels normés, et $f : V \to W$ une application linéaire. Montrer que f est différentiable si et seulement si elle est continue. Dans ce cas, déterminer la différentielle de f en tout point $p \in V$.

Exercice 19. Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ à $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

Considérons l'application $I : E \to \mathbb{R}$ définie par : $I(f) = \displaystyle\int_0^1 (f(x))^2 dx$.

(a) Montrer que I est continue. Est-ce que I est linéaire ?

Pour tout $f \in E$, on définit $L_f : E \to \mathbb{R}$ par : $L_f(h) = \displaystyle\int_0^1 2f(x)h(x)dx, \quad \forall h \in E.$

(b) Montrer que L_f est linéaire pour tout $f \in E$.

(c) Soit $\mathcal{L}_\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ l'espace des applications linéaires continues de E à $\mathbb{R}$, et $[\![\cdot]\!]$ la norme subordonnée induite par $\|\cdot\|_\infty$ et $|\cdot|$. Calculer $[\![L_f]\!]$ pour tout $f \in E$, et en déduire que $L_f \in \mathcal{L}_\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$.

(d) Montrer que I est différentiable, et que $dI(f) = L_f$ est sa différentielle.

(e) Soit $dI : E \to \mathcal{L}_\mathcal{C}(E, \mathbb{R})$ défini par $dI(f) = L_f$. Montrer que dI est continue, et en déduire que I est de classe $\mathcal{C}^1$.

(f) Est-ce que I est lipschitzienne ?

Exercice 20. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et $\ell^1_\lambda(\mathbb{R}) = \left\{(a_n)_n \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \ : \ \|(a_n)_n\|_{1,\lambda} := \displaystyle\sum_n \lambda^n |a_n| < +\infty\right\}$.

(a) Montrer que $\|\cdot\|_{1,\lambda}$ est une norme sur $\ell^1_\lambda(\mathbb{R})$.

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $f(x, y) = (a_n)_n$ la suite définie par récurrence par $a_0 = x$, $a_1 = y$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\phi(t) = \sum_n a_n t^n$ sa série génératrice.

(b) Montrer que $\phi(t) = \frac{x(1-t)+yt}{1-t-t^2}$, et que son rayon de convergence est $\lambda_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

(c) En déduire que $f(x, y) \in \ell^1_\lambda$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda < \lambda_0$.

(d) Fixons $\lambda = \frac{1}{2}$. Remarquer que f définit une application $f : \mathbb{R}^2 \to \ell^1_\lambda(\mathbb{R})$.

(e) Montrer que f est linéaire et continue.

Soit maintenant $g : \mathbb{R} \to \ell^1_\lambda(\mathbb{R})$ l'application définie par $g(x) = f(x, x^2)$.

(f) Montrer que g est différentiable. Montrer que $df(x)(h) = h \cdot f(1, 2x)$.

(g) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$.